Série 3 des Travaux Dirigés
Variables aléatoires

1. Variables aléatoires et Espérance Mathématique

Q1.1. Calculer l'espérance mathématique μ, la variance σ^2 et l'écart-type σ de chacune des lois de probabilité suivantes :

i.

x_i	2	3	11
$f(x_i)$	$1/3$	$1/2$	$1/6$

ii.

x_i	-5	-4	1	2
$f(x_i)$	$1/4$	$1/8$	$1/2$	$1/8$

iii.

x_i	1	3	4	5
$f(x_i)$	0,4	0,1	0,1	0,3

Q1.2. On jette un dé bien équilibré. Soit X la variable représentant le double du nombre obtenu, et Y une variable prenant les valeurs 1 ou 3 suivant que l'on obtient soit un nombre impair., soit un nombre pair. Calculer la distribution, l'espérance, la variance et l'écart-type de (i) X, (ii) Y, (iii) $X + Y$, (iv) XY.

Q1.3 On jette trois fois une pièce de monnaie **mal équilibrée**. On a $P(F) = 3/4$ et $P(P) = 1/4$. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de faces que l'on obtient. Calculer la distribution de probabilité, la moyenne, la variance et l'écart-type de X.

2. Loi de probabilité produit, variables aléatoires indépendantes

Q2.1. Supposons que X et Y aient les distributions jointes :

X \ Y	**-3**	**2**	**4**	**Somme**
1	0,1	0,2	0,2	**0,5**
3	0,3	0,1	0,1	**0,5**
	0,4	**0,3**	**0,3**	

i. Calculer les lois de probabilité de X et Y
ii. Calculer $Cov\ (X, Y)$, c.à.d. la covariance de X et Y
iii. Calculer $\rho(X.Y)$, c.à.d. le coefficient de corrélation de X et Y
iv. Est-ce que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes

Q2.2. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes ayant les lois de probabilité :

x_i	1	2
$f(x_i)$	0,6	0,4

Loi de Probabilité de X

y_i	5	10	15
$g(y_j)$	0,2	0,5	0,3

Loi de Probabilité de Y

Calculer la loi de probabilité produit h de X et Y.

Q2.3. On lance trois fois une pièce de monnaie **parfaitement équilibrée**. X est une variable aléatoire prenant respectivement les valeurs 0 et 1 selon que le premier jet donne face ou pile. Y désigne le nombre de faces obtenu. Calculer (i) la loi de probabilité de X et Y, (ii) la loi de probabilité produit h de X et Y, (iii) $Cov\ (X, Y)$.

3. Variables aléatoires continue

Q3.1. Soit X la v.a. continue ayant la distribution :

$$f(x) = \begin{cases} x + k\ si\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \quad\quad ailleurs \end{cases}$$

(i) Calculer k.
(ii) Calculer $P(1 \leq X \leq 2)$

Q3.2. Soit X la v.a. continue dont la distribution est constante sur un intervalle $I = \{a \leq X \leq b\}$ et vaut 0 ailleurs :

$$f(x) = \begin{cases} k \ si \ a \leq x \leq b \\ 0 \quad ailleurs \end{cases}$$

Cette variable est uniformément distribuée sur I. (i) Calculer k (ii) Calculer la moyenne de X. (iii) Déterminer la fonction de répartition F de X.

Q3.3. Soit X une variable aléatoire continue ayant la loi de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & si \ 0 \leq x \leq 8 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

(i) Calculer : $P(2 \leq x \leq 5)$, $P(3 \leq x \leq 7)$et $P(x \leq 6)$.
(ii) Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition F de X.